

УДК 517.983.53

## РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г.М.ГАСЫМОВА

*Бакинский Государственный Университет*  
*gunelqasimova@list.ru*

*В работе получены условия на операторные коэффициенты краевой задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа с разрывным коэффициентом, которые обеспечивают её регулярную разрешимость. Отметим, что главная часть исследуемого уравнения содержит нормальный оператор, а в краевом условии участвует некоторый абстрактный оператор.*

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, регулярное решение, краевая задача.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  краевую задачу

$$-u''(t) + \rho(t)A^2u(t) = f(t), \quad t \in R_+ = (0, \infty), \quad (1)$$

$$u(0) = Tu'(0), \quad (2)$$

где  $f(t), u(t)$  - вектор-функции, определённые в  $R_+ = (0, \infty)$  со значениями в  $H$ , а её коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

1)  $A$  - нормальный обратимый оператор с вполне непрерывным обратным  $A^{-1}$ , спектр которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon, 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$2) \rho(t) = \begin{cases} \alpha^2, & t \in (0, 1), \\ \beta^2, & t \in (1, \infty), \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0;$$

3)  $T \in L(H_{\frac{1}{2}}, H_{\frac{3}{2}})$ , т.е.  $T$  есть линейный непрерывный оператор из пространства  $H_{\frac{1}{2}}$  в пространство  $H_{\frac{3}{2}}$ , где  $H_\gamma = D(A^\gamma)$  есть гильбертово пространство относительно нормы  $\|x\|_\gamma = \|A^\gamma x\|$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $H_0 = H$ .

При выполнении условия 1) оператор  $A$  можно представить в виде  $A = UC$ , где  $C$  - положительно-определенный самосопряженный оператор с областью определения  $D(A)$ , а  $U$  - унитарный оператор в  $H$ . Если  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  - полная ортонормированная система собственных векторов  $A$ , т.е.

$$Ae_n = \lambda_n e_n, \lambda_n = \mu_n e^{i\varphi_n}, \varphi_n \in S_{\varepsilon},$$

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \dots, (e_n, e_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m, \\ 0, n \neq m, \end{cases}$$

то для любого  $x \in D(A)$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n, \quad Cx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, e_n) e_n,$$

а для любого  $y \in H$

$$Uy = \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\varphi_n} (y, e_n) e_n.$$

При  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  определим следующие гильбертовы пространства [1]:

$$L_2((a, b); H) = \left\{ f : \|f\|_{L_2((a, b); H)} = \left( \int_a^b \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < +\infty \right\},$$

$$W_2^2((a, b); H) = \left\{ u : u'' \in L_2((a, b); H), C^2 u \in L_2((a, b); H), \right.$$

$$\left. \|u\|_{W_2^2((a, b); H)} = \left( \|u''\|_{L_2((a, b); H)}^2 + \|C^2 u\|_{L_2((a, b); H)}^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

Отметим, что при  $a = -\infty, b = +\infty$  считаем, что  $L_2((-\infty, +\infty); H) = L_2(R; H)$  и  $W_2^2((-\infty, +\infty); H) = W_2^2(R; H)$ , а при  $a = 0, b = +\infty$  считаем, что  $L_2((0, \infty); H) = L_2(R_+; H)$  и  $W_2^2((0, \infty); H) = W_2^2(R_+; H)$ .

**Определение 1.** Если при  $f(t) \in L_2(R_+; H)$  существует вектор-функция  $u(t) \in W_2^2(R_+; H)$ , удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в  $R_+$ , то будем говорить, что  $u(t)$  есть *регулярное решение* уравнения (1).

**Определение 2.** Если при любом  $f(t) \in L_2(R_+; H)$  существует регулярное решение  $u(t)$  уравнения (1), которое удовлетворяет краевому условию (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t) - Tu'(t)\|_{3/2} = 0$$

и оценке

$$\|u\|_{W_2^2(R_+; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R_+; H)},$$

то будем говорить, что задача (1), (2) *регулярно разрешима*.

В данной работе мы докажем регулярную разрешимость задачи (1), (2) при некоторых предположениях относительно операторов  $A$  и  $T$ .

При  $\rho(t)=1$  и  $\varepsilon=0$  ( $A$  - положительно-определенный самосопряженный оператор) задача (1), (2) исследована в работе [2]. Когда  $\rho(t)$  удовлетворяет условию 2) при  $\varepsilon=0$  задача (1), (2) исследована в работе [3]. Отметим, что при  $\rho(t)=1$  аналогичные задачи рассмотрены в работах [4-6].

Далее, отметим, что при выполнении условия 1) оператор  $-A$  порождает сильно непрерывную полугруппу  $e^{-At}$  ограниченных операторов в  $H$ . Здесь

$$e^{-tA}y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} (y, e_n) e_n, \quad y \in H.$$

Имеет место

**Лемма 1.** Пусть  $0 \leq a < b \leq +\infty$ . Тогда при любом  $x \in H_{\frac{1}{2}}$  вектор-функция  $e^{-tA}x \in W_2^2((a, b); H)$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \in H_{\frac{1}{2}}$ . Тогда существует вектор  $y \in H$  такой, что  $C^{\frac{1}{2}}y = x$ . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \|e^{-tA}x\|_{W_2^2((a, b); H)}^2 &= \|A^2 e^{-tA}x\|_{L_2((a, b); H)}^2 + \|C^2 e^{-tA}x\|_{L_2((a, b); H)}^2 = \\ &= 2\|C^2 e^{-tA}x\|_{L_2((a, b); H)}^2 = 2\|C^{\frac{1}{2}}e^{-tA}y\|_{L_2((a, b); H)}^2 = \\ &= 2\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n |(y, e_n)|^2 e^{-2\mu_n \cos \varphi_n t} dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n |(y, e_n)|^2 \int_a^b e^{-2\mu_n \cos \varphi_n t} dt \leq \\ &\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n |(y, e_n)|^2 \int_a^b e^{-2\mu_n \cos \varepsilon t} dt = \frac{1}{\cos \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n |(y, e_n)|^2 (e^{-2\mu_n \cos \varepsilon a} - e^{-2\mu_n \cos \varepsilon b}) \leq \\ &\leq \frac{1}{\cos \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n |(y, e_n)|^2 (e^{-2\mu_n \cos \varepsilon a} + e^{-2\mu_n \cos \varepsilon b}) = \text{const} \|y\|^2 = \text{const} \|x\|_{\frac{1}{2}}^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из доказательства леммы следует, что, в частности, при  $x \in H_{\frac{1}{2}}$  имеет место неравенство

$$\|e^{-tA}\|_{W_2^2(R, H)} \leq \frac{1}{\cos \varepsilon} \|x\|_{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}.$$

Имеет место

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия 1)-3) и оператор

$$L = E - \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} e^{-2\alpha A} + \alpha T A \left( E + \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} e^{-2\alpha A} \right)$$

обратим в пространстве  $H_{\frac{3}{2}}$ . Тогда задача

$$-u''(t) + \rho(t)A^2u(t) = 0, \quad t \in R_+, \quad (3)$$

$$u(0) = Tu'(0) \quad (4)$$

имеет единственное нулевое регулярное решение.

**Доказательство.** Очевидно, что общее регулярное решение уравнения (3) имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} \xi_1(t) = e^{-\alpha A} \varphi_1 + e^{-\alpha(1-t)A} \varphi_2, & t \in (0,1), \\ \xi_2(t) = e^{-\beta(t-1)A} \varphi_3, & t \in (1,\infty), \end{cases}$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in H_{\frac{3}{2}}$  пока неизвестные векторы.

Из условия (4) и  $u(t) \in W_2^2(R_+; H)$  получаем, что

$$\xi_1(0) = T\xi_1'(0), \quad \xi_1(1-0) = \xi_2(1+0), \quad \xi_1'(1-0) = \xi_2'(1+0).$$

Таким образом, относительно  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\varphi_3$  получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_1 + e^{-\alpha A} \varphi_2 &= T(-\alpha A \varphi_1 + \alpha A e^{-\alpha A} \varphi_2), \\ e^{-\alpha A} \varphi_1 + \varphi_2 &= \varphi_3, \\ -\alpha A e^{-\alpha A} \varphi_1 + \alpha A \varphi_2 &= -\beta A \varphi_3. \end{aligned}$$

Из второго и третьего уравнений следует, что

$$\varphi_3 = e^{-\alpha A} \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha A} \varphi_1 - \frac{\alpha}{\beta} \varphi_2,$$

т.е.  $\varphi_2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} e^{-\alpha A} \varphi_1$ . Тогда из первого уравнения системы следует, что

$$\varphi_1 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} e^{-2\alpha A} \varphi_1 = \alpha \left( TA \varphi_1 + TA \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} e^{-2\alpha A} \varphi_1 \right).$$

Таким образом, относительно  $\varphi_1$  получаем уравнение

$$L\varphi_1 \equiv \left( \left( E - \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta} e^{-2\alpha A} \right) + \alpha TA \left( E + \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta} e^{-2\alpha A} \right) \right) \varphi_1 = 0.$$

Следовательно,  $\varphi_1 = 0$ . Тогда  $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$  и  $u(t) = 0$ . Теорема доказана.

Теперь докажем следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда краевая задача (1), (2) регулярно разрешима.

**Доказательство.** Из теоремы 1 следует, что достаточно доказать, что краевая задача (1), (2) имеет регулярное решение при любом  $f \in L_2(R_+; H)$ . Пусть  $f_1(t) = f(t)$  при  $t \in R_+$  и  $f_1(t) = 0$  при  $t \in (-\infty, 0)$ . Тогда  $f_1(t) \in L_2(R; H)$  и  $\|f_1\|_{L_2(R; H)} = \|f\|_{L_2(R_+; H)}$ . Обозначим через  $\hat{f}_1(\xi)$  преобразование Фурье вектор-функции  $f_1(t)$ , т.е.

$$\hat{f}_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt.$$

Далее определим вектор-функции

$$u_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 E + \alpha^2 A^2)^{-1} \hat{f}_1(\xi) e^{i\xi t} dt, \quad t \in R,$$

$$u_\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 E + \beta^2 A^2)^{-1} \hat{f}_1(\xi) e^{i\xi t} dt, \quad t \in R.$$

Из теоремы Планшереля следует, что

$$\begin{aligned} \|u_\alpha\|_{W_2^2(R;H)}^2 &= \|u_\alpha''\|_{L_2(R;H)}^2 + \|C^2 u_\alpha\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \\ &\leq \left( \sup_{\xi \in R} \|(\xi^2 E + \alpha^2 A^2)^{-1}\|^2 + \sup_{\xi \in R} \|C^2 (\xi^2 E + \alpha^2 A^2)^{-1}\|^2 \right) \|\hat{f}_1(\xi)\|_{L_2(R;H)}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как при любом  $\xi \in R$  имеем:

$$\begin{aligned} \|C^2 (\xi^2 E + \alpha^2 A^2)^{-1}\| &= \sup_{\lambda_n \in \sigma(A)} |\mu_n^2 (\xi^2 + \alpha^2 \lambda_n^2)^{-1}| = \\ &= \sup_{\lambda_n \in \sigma(A)} |\mu_n^2 (\xi^2 + \alpha^2 \mu_n^2 (\cos 2\varphi_n + i \sin 2\varphi_n))^{-1}| = \\ &= \sup_{\mu_n > 0} |\mu_n^2 (\xi^4 + \alpha^4 \mu_n^4 + 2\xi^2 \alpha^2 \mu_n^2 \cos 2\varphi_n)^{-1/2}| \leq \\ &\leq \sup_{\mu_n > 0} |\mu_n^2 (\xi^4 + \alpha^4 \mu_n^4 + 2\xi^2 \alpha^2 \mu_n^2 \cos 2\varepsilon)^{-1/2}|, \end{aligned}$$

то при  $\varepsilon \in [0, \pi/4)$  ( $\cos 2\varepsilon \geq 0$ ) имеем

$$\|C^2 (\xi^2 E + \alpha^2 A^2)^{-1}\| \leq \sup_{\mu_n > 0} |\mu_n^2 (\xi^4 + \alpha^4 \mu_n^4)^{-1/2}| \leq \frac{1}{\alpha^2},$$

а при  $\varepsilon \in [\pi/4, \pi/2)$ , ( $\cos 2\varepsilon \leq 0$ ) по неравенству Коши имеем

$$\begin{aligned} \|C^2 (\xi^2 E + \alpha^2 A^2)^{-1}\| &\leq \sup_{\mu_n > 0} |\mu_n^2 (\xi^4 + \alpha^4 \mu_n^4 + (\xi^4 + \alpha^4 \mu_n^4) \cos 2\varepsilon)^{-1/2}| = \\ &= \sup_{\mu_n > 0} |\mu_n^2 (\xi^4 + \alpha^4 \mu_n^4)^{-1/2} (1 + \cos 2\varepsilon)^{-1/2}| \leq \frac{1}{\sqrt{2} \alpha^2 \cos \varepsilon}. \end{aligned}$$

Тогда из (5) следует, что  $u_\alpha \in W_2^2(R;H)$  и

$$\|u_\alpha\|_{W_2^2(R;H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R;H)}. \quad (6)$$

Аналогично доказывается, что  $u_\beta \in W_2^2(R;H)$  и

$$\|u_\beta\|_{W_2^2(R;H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R;H)}. \quad (7)$$

Из вида вектор-функций  $u_\alpha(t)$  и  $u_\beta(t)$  следует, что они удовлетворяют уравнениям  $-u''(t) + \alpha^2 A^2 u(t) = f(t)$  и  $-u''(t) + \beta^2 A^2 u(t) = f(t)$  при  $t \in R_+$

почти всюду, соответственно. Теперь обозначим через  $\eta_\alpha(t)$  и  $\eta_\beta(t)$  сужения  $u_\alpha(t)$  на  $[0,1]$  и  $u_\beta(t)$  на  $[1,+\infty)$ , соответственно. Очевидно, что  $\eta_\alpha(t) \in W_2^2((0,1); H)$ ,  $\eta_\beta(t) \in W_2^2((1,\infty); H)$ . Тогда по теореме о следах  $\eta_\alpha^{(j)}(0) \in H_{2-j-\frac{1}{2}}$ ,  $\eta_\alpha^{(j)}(1) \in H_{2-j-\frac{1}{2}}$  и  $\eta_\beta^{(j)}(1) \in H_{2-j-\frac{1}{2}}$ ,  $j = 0,1$  [1]. Снова применяя теорему о следах с учетом неравенств (6) и (7), получаем, что

$$\begin{aligned} \|\eta_\alpha^{(j)}(0)\|_{H_{2-j-\frac{1}{2}}} &\leq C_{\alpha,j} \|f\|_{L_2(R_+; H)}, \quad \|\eta_\alpha^{(j)}(1)\|_{H_{2-j-\frac{1}{2}}} \leq C'_{\alpha,j} \|f\|_{L_2(R_+; H)}, \\ \|\eta_\beta^{(j)}(1)\|_{H_{2-j-\frac{1}{2}}} &\leq C'_{\beta,j} \|f\|_{L_2(R_+; H)}, \quad j = 0,1. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь будем искать регулярное решение задачи (1), (2) в виде

$$u(t) = \begin{cases} \eta_\alpha(t) + e^{-\alpha t} \varphi_1 + e^{-\alpha(1-t)} \varphi_2, & t \in (0,1), \\ \eta_\beta(t) + e^{-\beta(1-t)} \varphi_3, & t \in (1,+\infty), \end{cases}$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in H_{\frac{3}{2}}$ .

Из условия (2) и  $u(t) \in W_2^2(R_+; H)$  следует, что

$$\begin{aligned} \eta_\alpha(0) + \varphi_1 + e^{-\alpha A} \varphi_2 &= T \eta'_\alpha(0) + T(-\alpha A \varphi_1 + \alpha A e^{-\alpha A} \varphi_2), \\ \eta_\alpha(1) + e^{-\alpha A} \varphi_1 + \varphi_2 &= \eta_\beta(1) + \varphi_3, \\ \eta'_\alpha(1) - \alpha A e^{-\alpha A} \varphi_1 + \alpha A \varphi_2 &= \eta'_\beta(1) - \beta A \varphi_3. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} e^{-\alpha A} \varphi_1 + \psi_1, \quad \psi_1 = \frac{1}{\alpha + \beta} (A^{-1}(\eta'_\beta(1) - \eta'_\alpha(1)) + \beta(\eta_\beta(1) - \eta_\alpha(1))), \\ L \varphi_1 &= \psi, \quad \psi = -\eta_\alpha(0) + T \eta'_\alpha(0) - e^{-\alpha A} \psi_1 + \alpha T A e^{-\alpha A} \psi_1 \in H_{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\varphi_1 = L^{-1} \psi \in H_{\frac{3}{2}}$ . Таким образом,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3 \in H_{\frac{3}{2}}$ .

С другой стороны, из обратимости  $L$  в  $H_{\frac{3}{2}}$  и из неравенства (8) следует, что

$$\|\varphi_i\|_{H_{\frac{3}{2}}} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R_+; H)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда отсюда с учетом леммы получаем, что

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{W_2^2(R_+; H)} &\leq \|\eta_\alpha(t)\|_{W_2^2((0,1); H)} + \|e^{-\alpha A t} \varphi_1\|_{W_2^2((0,1); H)} + \\ &+ \|\eta_\beta(t)\|_{W_2^2((1,+\infty); H)} + \|e^{\beta(1-t)A} \varphi_3\|_{W_2^2((1,\infty); H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R_+; H)}, \end{aligned}$$

т.е.  $u(t)$  есть регулярное решение задачи (1), (2). Теорема доказана.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики - Грант № EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/07/1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференц. уравнения, 1992, т. 28, № 4, с. 651-661.
3. Mirzoev S.S., Aliev A.R., Rustamova L.A. On the Boundary Value Problem with the Operator in Boundary Conditions for the Operator-Differential Equation of Second Order with Discontinuous Coefficients // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2013, v. 9, No 2, p. 207-226.
4. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю. О разрешимости краевой задачи для уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с операторным коэффициентом в краевом условии // Математ. заметки, 2012, т. 91, № 6, с. 861-869.
5. Мирзоев С.С., Велиев С.Г. О решениях одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в классе голоморфных вектор-функций // Укр. матем. журнал, 2010, т. 62, № 6, с. 801-813.
6. Мирзоев С.С., Сафаров Р.Ф. О голоморфных решениях некоторых краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа // Укр. матем. журнал, 2011, т. 63, № 3, с. 416-420.

## OPERATOR ƏMSALLI İKİTƏRTİBLİ TƏNLİK ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI

G.M.QASIMOVA

### XÜLASƏ

İşdə bir sinif kəsilən əmsallı elliptik tipli ikitərtibli operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələsinin operator əmsalları üzərinə şərtlər tapılmışdır ki, bu şərtlər sərhəd məsələsinin rəqulyar həll olunmasını təmin edir. Qeyd edək ki, tədqiq olunan tənliyin baş hissəsi normal operatora malikdir, sərhəd şərtində isə müəyyən mücərrəd operator iştirak edir.

**Açar sözlər:** Hilbert fəzası, rəqulyar həll, sərhəd məsələsi.

## SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND ORDER EQUATION WITH OPERATOR COEFFICIENTS

G.M.GASIMOVA

### SUMMARY

In this paper, the conditions on the operator coefficients of the boundary value problem for a class of operator-differential equations of the second order of elliptic type with discontinuous coefficients providing the regular solvability are obtained. Note that the main part of the equation under consideration contains a normal operator, while the boundary condition contains an abstract operator.

**Key words:** Hilbert space, regular solution, boundary value problem.

*Поступила в редакцию: 15.09.2014 г.*

*Подписано к печати: 13.02.2015 г.*